

Об интервальной оценке вероятностных характеристик поточковых систем большой размерности

В.С. СМОРОДИН¹, Е.И. СУКАЧ¹, В.В. КАРАСЁВ², Е.И. КАРАСЁВА³, Д.В. ГЕТИКОВ¹

Излагается подход к исследованию пропускной способности структурно-сложных поточковых систем большой размерности, основанный на принципах диакоптики и позволяющий оценить вероятностные значения пропускной способности исследуемых систем по аналогичным характеристикам их участков.

Ключевые слова: пропускная способность, структурно-сложная система, вероятностно-алгебраическая модель.

The approach to the study of the capacity of structurally complex stream of high dimension systems based on the principles of diakoptics and allowing estimating the probability value of bandwidth of the systems studied on similar characteristics of their sites is stated.

Keywords: throughput, structurally-complex system, probability-algebraic model.

Введение. Известный подход, применяемый для расчёта пропускной способности поточковых систем (ПС) из различных предметных областей, предполагает использование вероятностных показателей пропускной способности участков для формирования итоговых вероятностных значений пропускной способности всей системы. Трудоемкость получения вероятностных оценок пропускной способности ПС с использованием такого подхода зависит как от числа участков, которые выделяются в процессе формализации исследуемой системы, так и от сложности связей между этими участками, представляющими в совокупности графовую структуру.

В том случае, если связи между участками ПС представимы в виде простой графовой структуры, применение метода вероятностно-алгебраического моделирования (ВАЛМ) [1] обеспечивает точную оценку искомых вероятностных показателей ПС при любом числе составляющих её участков. Анализ пропускной способности структурно-сложных ПС, как правило, сводится либо к оценке возможных границ пропускной способности, либо позволяет оценить пропускную способность систем с ограниченным числом участков [2].

В статье предлагается способ формирования вероятностных значений пропускной способности структурно-сложных ПС, не имеющий ограничений на число участков. Для решения поставленной задачи предлагается использовать принципы диакоптики [3], согласно которым система по определенным правилам расчленяется на некоторое число малых подсистем, на основе чего формируется графовая модель исходной системы. Для каждой из подсистем в отдельности проводится анализ и отыскивается решение поставленной задачи, а общее решение получается путем объединения полученных частных решений для подсистем с использованием разработанного математического аппарата. В частности, для оценки вероятностных значений пропускной способности структурно-сложной ПС большой размерности, представимой в виде композиции самостоятельных подсистем, предлагается применить вероятностно-алгебраическое умножение векторов вероятностей, характеризующих выделенные подсистемы, что позволяет значительно расширить возможности существующих методов при расчёте пропускной способности реальных ПС, включающих большое число элементарных участков с вероятностными значениями пропускной способности.

Постановка задачи. Объектом исследования является поточковая система, интерпретируемая в виде графовой структуры $G(N, K)$, где $N = \{N_v\}, v = \overline{1, l}$ – конечное множество вершин, $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ – множество ребер, являющихся образами участков исследуемой системы, выделенными в ходе её формализации. Число участков выделяется в соответствии с уровнем детализации ПС. Участки ПС характеризуются численными значениями совокупности параметров, которые изменяются в процессе функционирования системы и определяют возмож-

ные значения пропускной способности участков в текущий момент времени. Предполагается, что значение пропускной способности участков случайным образом изменяется в пределах заданных интервалов, а именно:

$$PR_i \in [PR_{i0}, PR_{in}], i = \overline{1, m}, \quad (1)$$

где m – число участков ПС, PR_i – значение пропускной способности i -го участка, PR_{i0} и PR_{in} – соответственно верхняя и нижняя границы пропускной способности i -го участка. Число состояний участков ПС определяется числом возможных уровней пропускной способности на заданных интервалах (1) и описывается множеством:

$$S = \{S_j\}, j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

которое формируется с учётом степени детализации объекта. Предполагается, что вероятности состояний известны и задаются векторами:

$$P^i = (p_1^i, p_2^i, \dots, p_n^i), \sum_{j=1}^n p_j^i = 1, i = \overline{1, m}. \quad (3)$$

Число участков и наличие связей между ними задают вид графа $G(N, K)$, определяющего методику расчёта вероятностных значений пропускной способности ПС.

Ставится задача вероятностной оценки пропускной способности ПС, то есть определения значений вектора вероятностей вида:

$$P^s = (P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_n)), \sum_{j=1}^n P(S_j) = 1 \quad (4)$$

и соответствующих интервальных значений пропускной способности по вероятностным значениям пропускных способностей участков:

$$[PR_0^s, PR_n^s] \rightarrow \{[PR_0^s, PR_1^s], \{[PR_j^s, PR_{j+1}^s], j = \overline{1, n-2}\}, [PR_{n-1}^s, PR_n^s]\}. \quad (5)$$

Автоматизация расчёта вероятностных значений пропускной способности потоковых систем. С целью автоматизации формирования вероятностных значений пропускной способности подструктур, выделенных в процессе декомпозиции ПС, предлагается использовать программное обеспечение (рисунок 1), реализующее методику расчёта вероятностных значений пропускной способности ограниченной размерности [3]. Программное обеспечение позволяет построить модель ПС ограниченной размерности и сформировать вектора вида (4) и (5), которые служат исходными данными для расчёта значений аналогичных векторов структурно-сложной ПС большой размерности.

Применение программного обеспечения для ПС ограниченной размерности позволило установить зависимость времени расчёта результирующих значений вероятностей пропускной способности от количества участков ПС (рисунок 2) и числа состояний (рисунок 3), описывающих возможные значения пропускной способности.

Исследования подтвердили экспоненциальный рост времени выполнения расчёта при увеличении числа участков ПС и количества состояний участков, определяющих возможные значения их пропускной способности. Это послужило основанием для разработки методики оценки вероятностных значений пропускной способности ПС, снимающей ограничения на число их участков и количество состояний пропускной способности исследуемых объектов

Вероятностно-алгебраическое моделирование потоковых систем структурно-сложной организации большой размерности. Особенности аппарата вероятностно-алгебраического моделирования позволяют сформулировать следующие основные этапы его применения для построения и использования моделей ПС большой размерности с целью формирования вероятностной оценки их пропускной способности.

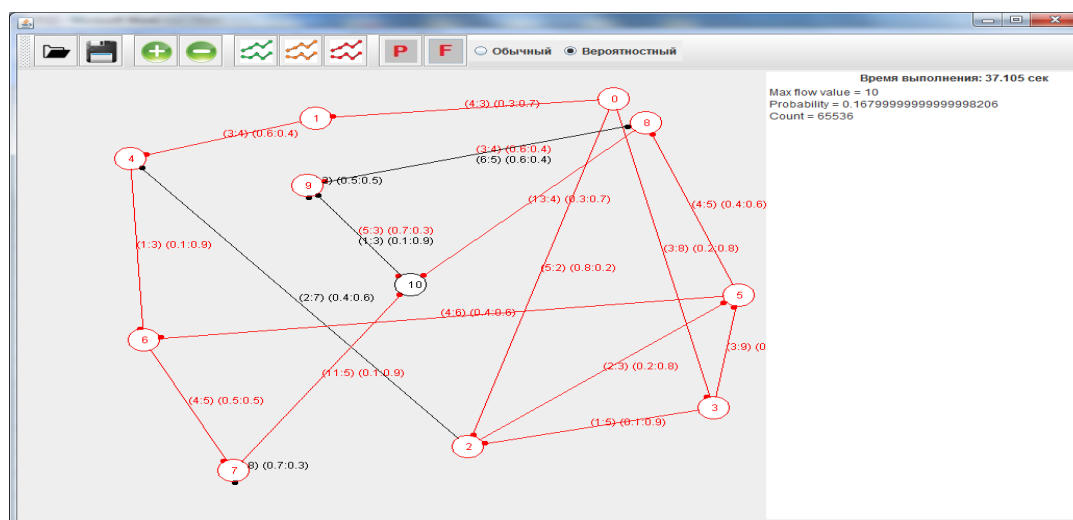


Рисунок 1 – Вид главного окна программного инструментария для оценки вероятностных характеристик пропускной способности потоковых систем ограниченной размерности

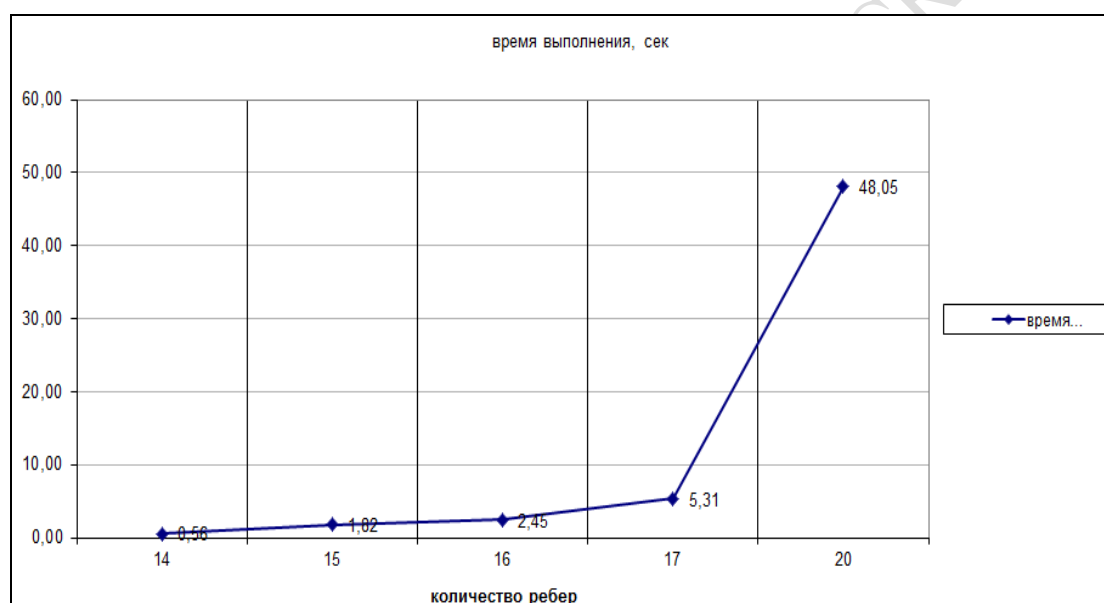


Рисунок 2 – Зависимость времени расчёта вероятностных характеристик пропускной способности потоковой системы от количества её участков

Этап 1. Формализация ПС, интерпретируемой в виде структуры-четырёхполюсника. С учётом целей моделирования и состава вычисляемых показателей ПС реализуется построение графа $G(N, K)$ и выбор четырёх терминальных вершин $N_1, N_2, N_3, N_4 \in N$, определяющих входы/выходы многосвязной структуры.

Для выделенных участков ПС с использованием экспериментальных данных формируются вектора вероятностей, характеризующие возможные значения пропускной способности. Предполагается, что значения пропускной способности участков изменяются в пределах заданных интервалов (1). Интервалы изменения пропускной способности PR_i участков $K = \{K_i\}, i = \overline{1, m}$ разбиваются на n интервалов, характеризующих уровни (состояния элементов ПС) пропускной способности:

$$[PR_{i0}, PR_{in}] \rightarrow \{[PR_{i0}, PR_{i1}], [PR_{ij}, PR_{i(j+1)}], j = \overline{1, n-2}, [PR_{i(n-1)}, PR_{in}]\}, i = \overline{1, m} \quad (6)$$

Состояния участков изменяются вероятностным образом и в текущий момент времени описываются векторами вида (3).

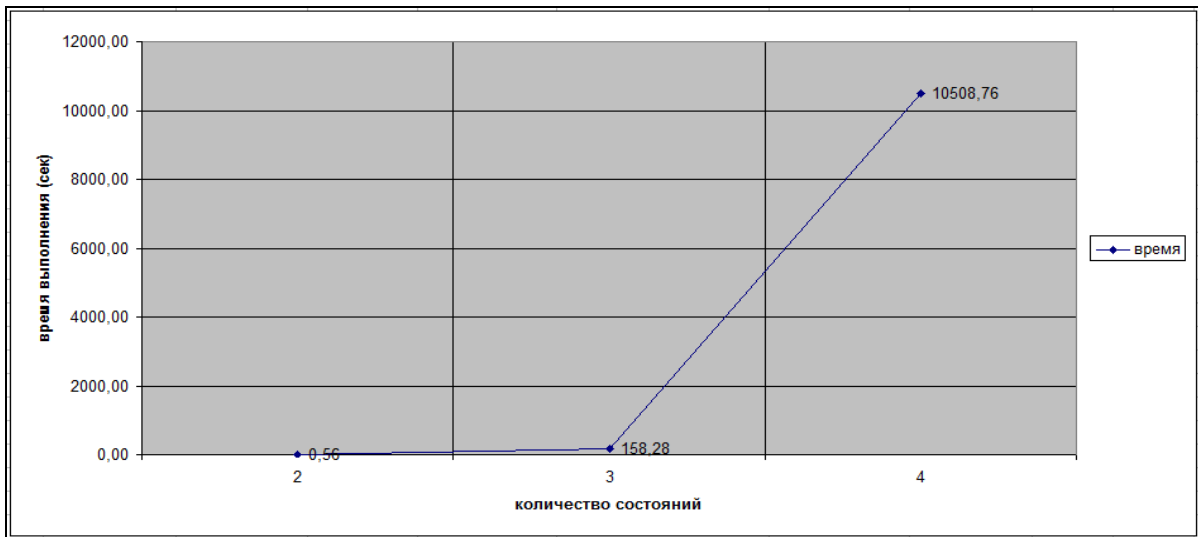


Рисунок 3 – Зависимость времени расчёта вероятностных характеристик пропускной способности потоковой системы от числа состояний её участков

Этап 2. Редуцирование структуры-четырёхполюсника. В результате применения средств интеллектуального анализа графовой структуры реализуется редуцирование графа $G(N, K)$, сопровождающееся пересчётом векторов вероятностей состояний пропускной способности и интервальных оценок пропускной способности. В процессе упрощения исключаются участки с параллельными/последовательными соединениями структурных элементов графа и реализуется вероятностно-алгебраическое умножение [1] с целью получения результирующих вероятностных значений пропускной способности выделенных участков. В результате происходит автоматическое упрощение графовой структуры:

$$G(N, K) \rightarrow G(N', K'), N' \leq N, K' \leq K. \quad (7)$$

Для участков, расположенных последовательно, реализуется вероятностно-алгебраическое умножение по функции $F_1(i, j) = \min(i, j)$, а интервальные оценки граничных значений пропускной способности результирующего участка $[PR_{r0}, PR_{rn}]$ вычисляются по формуле:

$$[PR_{r0}, PR_{rn}] = [\min(PR_{1o}, PR_{2o}), \min(PR_{1n}, PR_{2n})], \quad (8)$$

где $[PR_{1o}, PR_{1n}]$ и $[PR_{2o}, PR_{2n}]$ интервальные оценки значений пропускной способности, соответственно, первого и второго участков, расположенных последовательно.

Для параллельных участков реализуется вероятностно-алгебраическое умножение с использованием функции $F_2(i, j) = \min(i + j - 1, n)$, а расчет значений пропускных способностей $[PR_{r0}, PR_{rn}]$ реализуется по формулам:

$$[PR_{r0}, PR_{rn}] = [(PR_{1o} + PR_{2o}), (PR_{1n} + PR_{2n})]. \quad (9)$$

Полученные интервальные оценки пропускной способности (8) и (9) в свою очередь представляются в виде совокупности интервальных оценок вида (6), являющихся исходными данными для проведения последующих расчётов.

Этап 3. Представление редуцированного графа потоковой системы в виде композиции подструктур-четырёхполюсников. При построении вариантов декомпозиции графа $G(N', K')$ на подструктуры-четырёхполюсники:

$$G(N', K') \rightarrow \{STR_1(N'_1, K'_1), STR_2(N'_2, K'_2)\}, N'_i \leq N', K'_i \leq K', i = 1, 2, \quad (10)$$

предполагается, что две терминальные вершины $N'_i \in N', i = 1, 2$ исходного графа $G(N', K')$ принадлежат первой подструктуре-четырёхполюснику $STR_1(N'_1, K'_1)$, а две оставшиеся $N'_i \in N', i = 3, 4$ являются вершинами второй подструктуры-четырёхполюсника $STR_2(N'_2, K'_2)$.

Этап 4. Оценка размерности подструктур-четырёхполюсников. На этом этапе оценивается число структурных составляющих двух графов, сформированных на этапе 3. Если выполняются неравенства вида:

$$K'_i \leq K_d, i = 1, 2, \quad (11)$$

где K_d – число участков ПС, позволяющее применить комбинаторный алгоритм расчёта вероятностных значений пропускной способности ПС. В противном случае реализуется возврат на этап 2, куда в качестве исходных графов поступают сформированные подструктуры-четырёхполюсники $\{STR_i\}, i = 1, 2$.

Этап 5. Расчёт вероятностных характеристик пропускной способности подструктур-четырёхполюсников. Для полученного варианта представления исходного графа $G(N', K')$ в виде композиции подструктур-четырёхполюсников реализуются расчёты вероятностных характеристик пропускной способности для различных сочетаний входов и выходов, относящихся ко множеству терминальных вершин анализируемых многосвязных подструктур [3].

Результатом выполнения этапа являются сформированные вектора вероятностей вида (4) и соответствующие интервальные оценки пропускной способности (5), представленные в виде диаграмм значений пропускной способности для различных сочетаний терминальных вершин подструктур-четырёхполюсников.

Этап 6. Вероятностно-алгебраическое умножение подструктур-четырёхполюсников. В случае разрезания графа $G(N', K')$ по общим двум вершинам реализуется вероятностно-алгебраическое умножение двух агрегированных подструктур-четырёхполюсников с многократным использованием формулы вероятностно-алгебраического умножения

$$p_k^3 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^k p_i^1 p_j^2, \text{ где } i, j, k = \overline{1, n}, \quad (12)$$

где $P^1 = (p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1)$, $P^2 = (p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2)$ – вектора вероятностей, характеризующие пропускную способность подструктур-четырёхполюсников $\{STR_i\}, i = 1, 2$, $P^3 = (p_1^3, p_2^3, \dots, p_n^3)$ – результирующий вектор вероятностей, a_{ij}^k – коэффициенты вероятностно-алгебраического умножения.

Итоговые вектора вероятностей пропускной способности анализируемых ПС, представленных в виде структур-четырёхполюсников для различных сочетаний терминальных вершин (полюсов) определяются по формулам:

$$P(N1t, N3t) = (P^{s1} \vee P^{s5}) \oplus (P^{s2} \vee P^{s7}), \quad (14)$$

$$P(N1t, N4t) = (P^{s1} \vee P^{s6}) \oplus (P^{s2} \vee P^{s8}), \quad (15)$$

$$P(N2t, N3t) = (P^{s3} \vee P^{s5}) \oplus (P^{s4} \vee P^{s7}), \quad (16)$$

$$P(N2t, N4t) = (P^{s4} \vee P^{s8}) \oplus (P^{s3} \vee P^{s6}), \quad (17)$$

где операция вероятностно-алгебраического умножения \vee задаётся функцией $F_1(i, j) = \min(i, j)$, а операция \oplus описывается функцией $F_2(i, j) = \min(i + j - 1, n)$.

Заключение. Преимущество предложенного подхода, основанного на представлении исходно графа ПС в виде композиции подструктур-четырёхполюсников, заключается в возможности одномоментного расчёта вероятностных значений пропускной способности систем, имеющих четыре терминальные вершины (два входа и два выхода). Применение вероятностно-алгебраического моделирования для структурно-сложных потоковых систем большой размерности позволяет учесть вероятностную природу пропускной способности исследуемых объектов и решить следующие задачи:

- одномоментно и в динамике провести сравнительный анализ различных структурных вариантов организации ПС;
- подобрать параметры пропускной способности участков, обеспечивающих заданный уровень пропускной способности ПС;

- оценить влияние параметров пропускной способности участков на эффективность функционирования ПС;
- получить в символьном виде значения вектора вероятностей пропускной способности ПС.

Литература

1. Сукач, Е.И. Методика оценки пропускной способности потоковой сети на основе вероятностно-алгебраического моделирования / Е.И. Сукач // Доклады БГУИР. – 2011. – № 4 (58). – С. 18–24.
2. Сукач, Е.И. О различных подходах к исследованию вероятностных характеристик надёжности информационно-вычислительных сетей / Е.И. Сукач, Е.И. Карасёва, Ю.В. Жердецкий, М.А. Бужан // Известия Гомельского гос. университета им. Ф. Скорины. – 2015. – № 3 (90). – С. 83–87.
3. Крон, Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) / Г. Крон. – М. :Наука, 1972 – 544 с.
4. Сукач, Е.И. Об одном подходе к оценке вероятностных характеристик пропускной способности потоковой системы// Е.И. Сукач, К.Ю. Гончаров, Ю.В. Жердецкий // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XV Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, 26–28 марта 2012 г. / ГГУ им. Ф. Скорины. – Гомель, 2012. – Т. 1. – С. 72–73.

¹Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

²Институт проблем машиноведения РАН

³Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Поступила в редакцию 28.04.2016